Funkcje liczbowe - przegląd wybranych funkcji elementarnych

Dokonamy teraz przeglądu pewnych podstawowych typów funkcji, z jakimi często mamy do czynienia w analizie matematycznej (i nie tylko). Wśród nich znajdą się funkcje poznane na wcześniejszych etapach nauki matematyki (funkcja wielomianowa, wymierna, potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna, funkcje trygonometryczne), jak i funkcje, z którymi Czytelnik mógł się wcześniej nie zetknąć (np. funkcje cyklometryczne). Każdą funkcję, którą można uzyskać z wyżej wymienionych poprzez dokonanie na nich skończonej liczby operacji dodawania, mnożenia, dzielenia, odwracania i składania nazywamy *funkcją elementarną*. Omawiając funkcje elementarne skupimy się na podaniu podstawowych informacji, których przyswojenie jest niezbędne w zrozumieniu pojęć i opanowaniu metod analizy matematycznej.

1° **Funkcja wielomianowa**

Funkcją wielomianową (*wielomianem*) stopnia n nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ ,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy każdą taką liczbę r, że $W(r) = 0$.

Dwa wielomiany są *równe* wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej x, jak i równe wyrazy wolne.

Podamy teraz kilka twierdzeń, które są przydatne przy rozwiązywaniu równań i nierówności wielomianowych.

Twierdzenie 1 (Bezouta). Wielomian $W(x)$ dzieli się bez reszty przez dwumian $x-r$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba r jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Uwaga. Z twierdzenia 1 wynika, że jeżeli liczba r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to wówczas wielomian ten można zapisać w postaci

$$W(x) = (x-r)Q(x) \ ,$$

gdzie $Q(x)$ jest wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-r$.

Twierdzenie 2. Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Twierdzenie 3. Każdy wielomian można przedstawić w postaci iloczynu, którego każdy czynnik jest wielomianem stopnia co najwyżej drugiego.

Twierdzenie 4. Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu $W(x)$ są liczbami całkowitymi, a liczba wymierna zapisana w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, natomiast q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Uwaga. Z twierdzenia 4 wynika, że całkowitych pierwiastków wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych poszukujemy tylko wśród dzielników wyrazu wolnego a_0.

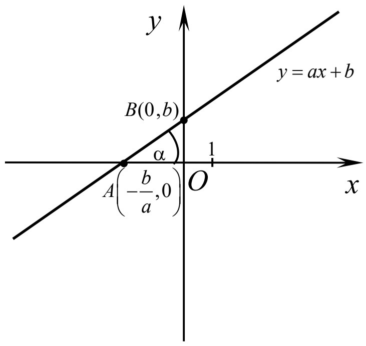
Szczególnymi przypadkami wielomianów są: funkcja liniowa (w tym funkcja stała), funkcja kwadratowa.

*** Funkcja liniowa**

Funkcją liniową nazywamy funkcję postaci

$$y = ax + b,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.



Rys. 5. Funkcja liniowa

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta, która nachylona jest do osi Ox pod kątem α takim, że $\mathrm{tg}\alpha = a$ (a – współczynnik kierunkowy prostej) i przecina oś Oy w punkcie o rzędnej równej b (b – współczynnik przesunięcia prostej).

Miejscem zerowym funkcji liniowej (a jednocześnie rozwiązaniem równania liniowego $ax + b = 0$) dla $a \neq 0$ jest

$$x_0 = -\frac{b}{a} .$$

Funkcja liniowa jest:

- rosnąca dla $a > 0$, malejąca dla $a < 0$, stała dla $a = 0$,
- ograniczona dla $a = 0$ (funkcja stała),
- różnowartościowa dla $a \neq 0$.

*** Funkcja kwadratowa**

Funkcją kwadratową (*trójmianem kwadratowym*) nazywamy funkcję postaci

$$y = ax^2 + bx + c ,$$

gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Wyrażenie

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

nazywamy *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego.

Postać

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

nazywamy *postacią kanoniczną* trójmianu kwadratowego.

Wykresem funkcji kwadratowej jest *parabola* o wierzchołku w punkcie

$$W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) .$$

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej (a jednocześnie pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od znaku wyróżnika:

1) jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ .$$

   W tym przypadku trójmian kwadratowy można zapisać w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2) jeżeli $\Delta = 0$, to trójmian ma jedno miejsce zerowe (równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek tzw. podwójny):

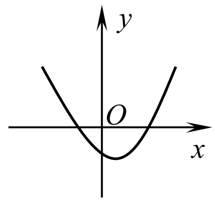
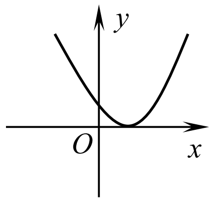
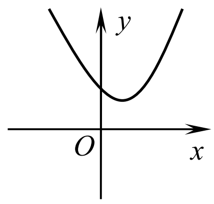
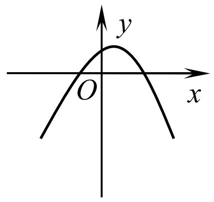
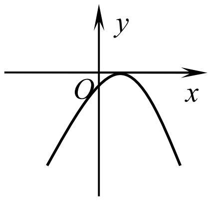
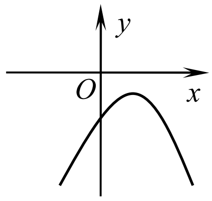
$$x_0 = -\frac{b}{2a} \ .$$

   Postać iloczynowa trójmianu: $y = a\left(x - x_0\right)^2$.

2) jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy nie ma miejsc zerowych (równanie kwadratowe nie ma pierwiastków).

Położenie paraboli zależy od a oraz Δ . Ilustrują to rysunki zamieszczone w tabeli 1.

Tab. 1. Ilustracja zależności położenia paraboli od a oraz Δ

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Funkcja kwadratowa jest:

- przedziałami monotoniczna,
- ograniczona z dołu dla $a > 0$, ograniczona z góry dla $a < 0$,
- parzysta dla $b = 0$.

Rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych

Bardzo ważną umiejętnością, opanowanie której jest niezbędne w wielu zagadnieniach analizy matematycznej, jest rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych: $W(x) = 0$, $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) \leq 0$. W ogólnym przypadku nie jest to zagadnienie trywialne – już dla równań stopnia wyższego niż 3 nie ma uniwersalnych metod ich rozwiązywania. Pewne równania wielomianowe dają się „sprytnie" rozwiązać poprzez odpowiednie grupowanie wyrazów oraz zastosowanie wzorów skróconego mnożenia. Przy rozwiązywaniu niektórych równań często musimy posłużyć się twierdzeniami 1 – 4.

Rozwiązanie nierówności wielomianowej na ogół odczytuje się z rysunku, będącego ilustracją graficzną znaku wartości wielomianu. Aby sporządzić taki rysunek należy wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, oraz zapisać go w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych. Jeżeli w rozkładzie tym występuje czynniki postaci $(x-r)^k$, to liczbę r nazywamy *k-krotnym* pierwiastkiem wielomianu. Wyznaczone pierwiastki zaznaczamy na osi liczbowej, a następnie poczynając od prawej strony rysujemy linię przechodzącą lub stykającą się z osią w zaznaczonych punktach, przy czym obowiązują tu następujące zasady:

1) jeżeli współczynnik a_n przy najwyższej potędze niewiadomej x, jest dodatni (ujemny), to linię zaczynamy rysować powyżej (poniżej) osi,
2) jeżeli dany pierwiastek jest nieparzystej krotności, to rysowany wykres przecina oś w odpowiadającym mu punkcie,
3) jeżeli dany pierwiastek jest parzystej krotności, to w odpowiadającym mu punkcie rysowana linia dotyka osi, ale jej nie przecina („odbija" się od osi).

Z otrzymanego rysunku łatwo już odczytać rozwiązanie danej nierówności.

Przykład 8. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $x^5 - x = 0$, $x^5 - x > 0$, $x^5 - x \leq 0$,

b) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$, $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \leq 0$,

c) $-x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = 0$, $-x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3 < 0$.

Rozwiązanie.

a) Aby rozwiązać dane równanie wystarczy wyciągnąć x przed nawias, a następnie do wyrażenia w nawiasie dwukrotnie zastosować wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$x^5 - x = 0,$$
$$x(x^4 - 1) = 0,$$
$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0,$$
$$x(x-1)(x+1)(x^2 + 1) = 0.$$

Z otrzymanej postaci iloczynowej odczytujemy (po przyrównaniu każdego czynnika do 0) rozwiązania danego równania: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

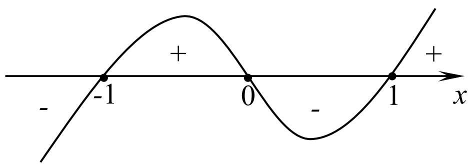
Przechodzimy teraz do rozwiązania podanych nierówności. Ponieważ każdy z pierwiastków wielomianu znajdującego się z prawej strony nierówności jest pierwiastkiem pojedynczym (czyli nieparzystej krotności), to wykres zmiany znaku wartości tego wielomianu będzie wyglądał tak, jak pokazano na rysunku 6. Z rysunku odczytujemy rozwiązania nierówności:

$x^5 - x > 0 \Leftrightarrow$

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty),$$

$x^5 - x \leq 0 \Leftrightarrow$

$$x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle.$$



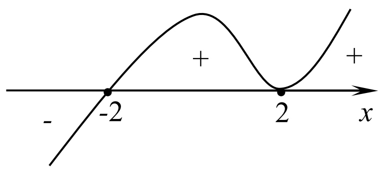
Rys. 6. Ilustracja do przykładu 8a)

b) Aby rozwiązać dane równanie, wielomian znajdujący się po prawej stronie znaku równości rozkładamy na iloczyn czynników nierozkładalnych:

$$x^3-2x^2-4x+8=0,$$
$$x^2(x-2)-4(x-2)=0,$$
$$(x^2-4)(x-2)=0,$$
$$(x+2)(x-2)^2=0.$$

Zatem rozwiązaniami naszego równania są: $x_1=-2$, $x_2=2$.

W celu rozwiązania nierówności $x^3-2x^2-4x+8\le 0$, którą można teraz zapisać w równoważnej postaci $(x+2)(x-2)^2\le 0$, sporządźmy wykres znaku wartości wielomianu znajdującego się po prawej stronie nierówności (rysunek 7). Zauważmy przy tym, że liczba 2 jest podwójnym (parzystej krotności) pierwiastkiem tego wielomianu. Zatem



Rys. 7. Ilustracja do przykładu 8b)

$x^3-2x^2-4x+8\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2\rangle\cup\{2\}$.

c) Wprowadźmy oznaczenie $W(x)=-x^4-2x^3+4x^2+2x-3$. Aby rozwiązać równanie $W(x)=0$, skorzystamy najpierw z uwagi do twierdzenia 4 i sprawdzimy, czy któryś z dzielników wyrazu wolnego $a_0=-3$ (tymi dzielnikami są: 1, -1, 3, -3), nie jest czasem pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Ponieważ $W(1)=0$, to mamy już pierwsze rozwiązanie danego równania $x_1=1$. Na mocy twierdzenia Bezouta, wielomian $W(x)$ dzieli się zatem bez reszty przez dwumian $x-1$. Wykonujemy dzielenie:

$$
\begin{array}{l}
(-x^4-2x^3+4x^2+2x-3):(x-1)=-x^3-3x^2+x+3\\
\underline{\ x^4-x^3\ }\\
=\ -3x^3+4x^2+2x-3\\
\qquad \underline{3x^3-3x^2}\\
\qquad =\quad x^2+2x-3\\
\qquad\quad \underline{-x^2+x}\\
\qquad\quad =\ 3x-3\\
\qquad\qquad \underline{-3x+3}\\
\qquad\qquad\ = \ =
\end{array}
$$

Korzystając w pierwszej kolejności z uwagi do twierdzenia 1, a następnie wykonując pewne przekształcenia otrzymujemy:

$W(x) = (x-1)(-x^3 - 3x^2 + x + 3) = (x-1)\left[-x^2(x+3) + 1(x+3)\right] =$

$= (x-1)\left[-(x^2-1)(x+3)\right] = -(x-1)(x-1)(x+1)(x+3) = -(x-1)^2(x+1)(x+3)$.

Nasze równanie można zatem zapisać w postaci:

$-(x-1)^2(x+1)(x+3) = 0$,

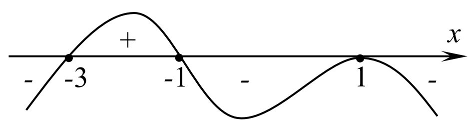
skąd odczytujemy jego rozwiązania: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

Rozwiązanie nierówności $W(x) < 0$, które teraz możemy zapisać w postaci:

$-(x-1)^2(x+1)(x+3) < 0$

odczytujemy z rysunku 8:

$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.



Rys. 8. Ilustracja do przykładu 8c)

2° **Funkcja wymierna**

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci

$$y = \frac{U(x)}{V(x)},$$

gdzie $U(x)$ i $V(x)$ są wielomianami oraz dla dowolnego x musi być spełniony warunek $V(x) \neq 0$.

Szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej jest *funkcja homograficzna* tj. funkcja postaci

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

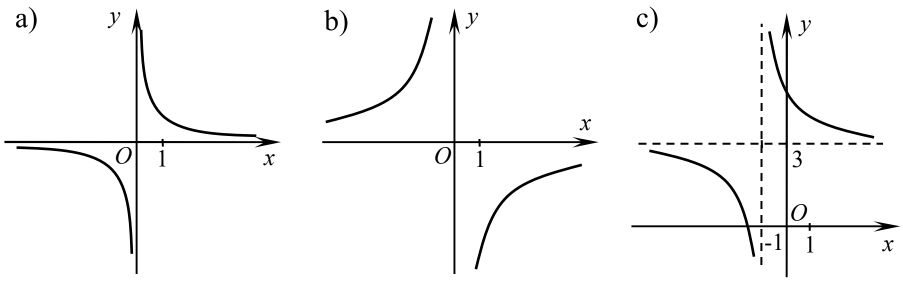
gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Wykresem funkcji homograficznej jest *hiperbola*. Hiperbola składa się z dwóch gałęzi, które nie przecinają prostych o równaniach: $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$ (są to tzw. asymptoty hiperboli).

Przykład 9. Naszkicować wykres funkcji:

a) $y = \frac{1}{x}$, b) $y = -\frac{4}{x}$, c) $y = \frac{3x+5}{x+1}$.

Rozwiązanie. Asymptotami wykresów funkcji z przykładu a) i b) są osie układu współrzędnych, natomiast funkcji z przykładu c) proste: $x=-1$, $y=3$. Hiperbole będące wykresami tych funkcji przedstawione są na rysunku 9.



Rys. 9. Ilustracja do przykładu 9

Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych

Zajmiemy się teraz zagadnieniem rozwiązywania równań i nierówności wymiernych, tj. takich, w których występują wyrażenia wymierne.

Aby rozwiązać równanie wymierne wystarczy pomnożyć go przez wspólny mianownik wszystkich wyrażeń wymiernych.

Z kolei nierówności wymierne sprowadzamy najpierw do takiej postaci, aby po prawej stronie znaku nierówności otrzymać 0. Lewą stronę zapisujemy na jednej kresce ułamkowej, a następnie z postaci ilorazowej przechodzimy na równoważną jej postać iloczynową nierówności:

$$\frac{U(x)}{V(x)}>0 \iff U(x)\cdot V(x)>0,$$

$$\frac{U(x)}{V(x)}<0 \iff U(x)\cdot V(x)<0,$$

$$\frac{U(x)}{V(x)}\geq 0 \iff U(x)\cdot V(x)\geq 0 \wedge V(x)\neq 0,$$

$$\frac{U(x)}{V(x)}\leq 0 \iff U(x)\cdot V(x)\leq 0 \wedge V(x)\neq 0.$$

Przykład 10. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\frac{2}{x}=1$, $\quad \frac{2}{x}>1$, $\qquad$ b) $x=\frac{3}{x-2}$, $\quad x\leq\frac{3}{x-2}$.

Rozwiązanie.

a) Wyznaczamy najpierw dziedzinę równania i nierówności: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

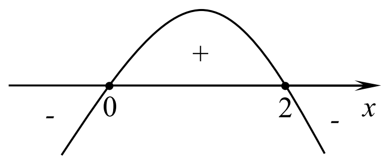
Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{2}{x} = 1 \ /\cdot x\,,$$
$$2 = x$$

Rozwiązaniem równania jest: $x = 2$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{2}{x} > 1,$$
$$\frac{2}{x} - 1 > 0\,,$$
$$\frac{2}{x} - \frac{x}{x} > 0\,,$$
$$\frac{2 - x}{x} > 0\,.$$



Rys. 10. Ilustracja do przykładu 10a)

Przechodzimy na postać iloczynową otrzymując nierówność kwadratową:

$$(2 - x)x > 0,$$

której rozwiązanie (po wyznaczeniu pierwiastków: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ wyrażenia występującego po prawej stronie nierówności) odczytujemy z rysunku 10:

$$x \in (0, 2)\,.$$

b) Dziedziną równania i nierówności jest: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Rozwiązujemy równanie:

$$x = \frac{3}{x-2} \ /\cdot (x-2)\,,$$
$$x \cdot (x - 2) = 3\,,$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0\,,$$

$\Delta = 16$, to rozwiązaniami równania są: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$x \le \frac{3}{x-2}\,,$$
$$\frac{x(x-2)}{x-2} - \frac{3}{x-2} \le 0,$$

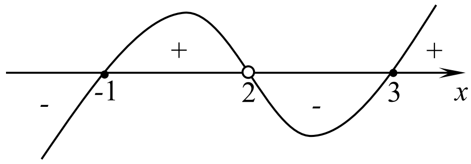
$$\frac{x^2-2x-3}{x-2} \le 0.$$

Pamiętając o dziedzinie nierówności przechodzimy na postać iloczynową

$$(x^2-2x-3)(x-2) \le 0\ .$$

Uwzględniając wyznaczone wcześniej pierwiastki pierwszego czynnika możemy zapisać:

$$(x+1)(x-3)(x-2) \le 0\ .$$



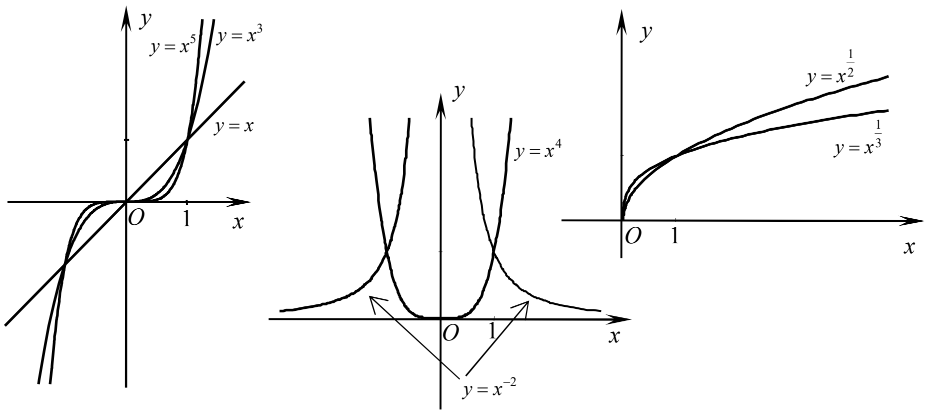
Rys. 11. Ilustracja do przykładu 10b)

Rozwiązanie otrzymanej nierówności wielomianowej odczytujemy z rysunku 11: $x \in (-\infty, -1\rangle \cup (2, 3\rangle$.

3° Funkcja potęgowa

Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci

$$y = x^r\ .$$



Rys. 12. Wykresy przykładowych funkcji potęgowych

Dziedzina (oraz własności) funkcji potęgowej zależy od r:

- jeżeli $r = 0$, to $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$,
- jeżeli $r \in \mathbb{N}$, to $D_f = \mathbb{R}$, ($\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych),
- jeżeli $r \in \mathbb{Z}^-$, to $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ($\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych),

- jeżeli $r \in \mathbb{Q}^+$, to $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ($\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych),
- jeżeli $r \in \mathbb{Q}^-$, to $D_f = \mathbb{R}^+$.

Nie będziemy szczegółowo omawiać funkcji potęgowych, ograniczymy się jedynie do podania wykresów kilku przykładowych funkcji tego typu (rysunek 12).

4° Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci

$$y = a^x,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zanim podamy definicję funkcji logarytmicznej przypomnimy pojęcie i własności logarytmu.

Logarytmem liczby dodatniej *b* przy podstawie *a*, gdzie $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść *a*, aby otrzymać *b*. Możemy zatem zapisać

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Jeżeli $a, a_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$, $c, k \in \mathbb{R}$, to:

1) $\log_a a^c = c$,
2) $a^{\log_a b} = b$,
3) $\log_a 1 = 0$,
4) $\log_a a = 1$,
5) $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$,
6) $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$,
7) $\log_a b^k = k \log_a b$,
8) $\log_a b = \dfrac{\log_{a_1} b}{\log_{a_1} a}$.

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci

$$y = \log_a x,$$

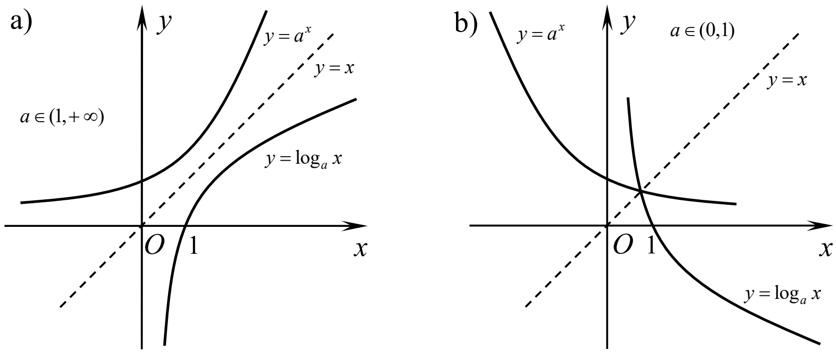
gdzie $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Funkcja wykładnicza o podstawie a i funkcja logarytmiczna o tej samej podstawie a są funkcjami odwrotnymi względem siebie.

Szczególnym przypadkiem funkcji wykładniczej jest tzw. *funkcja eksponencjalna* to jest funkcja wykładnicza o podstawie niewymiernej $e = 2,7182818...$ (tzw. liczba Eulera lub liczba Nepera). Funkcję odwrotną do funkcji $y = e^x$ zapisujemy $y = \ln x$, a logarytm z prawej strony wzoru funkcji nazywamy *logarytmem naturalnym* (czyli jest to logarytm o podstawie e).

Rysunek 13 stanowi ilustrację wpływu podstawy a na wygląd wykresu (jak również na własności) funkcji wykładniczej i logarytmicznej. Analizując te wykresy można zauważyć, że obie te funkcje są:

- różnowartościowe,
- rosnące dla $a \in (1, +\infty)$,
- malejące dla $a \in (0,1)$.



Rys.13. Wykresy funkcji wykładniczej i logarytmicznej dla: a) $a \in (1, +\infty)$, b) $a \in (0,1)$

Rozwiązywanie równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych

Na podstawie podanych własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej można zapisać równoważności wykorzystywane przy rozwiązywaniu równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych:

- $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ oraz $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,
- jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to:

  $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ oraz $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$,
- jeżeli $a \in (0,1)$, to:

  $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ oraz $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Zatem rozwiązując równania i nierówności wykładnicze (logarytmiczne), sprowadzamy je do takiej postaci, aby po obu stronach znaku równości lub nierówności była potęga (był logarytm) o tej samej podstawie, a następnie opuszczamy podstawy (logarytmy) pamiętając o tym, aby w przypadku podstaw z przedziału $(0,1)$ zmienić znak nierówności na przeciwny.

Przykład 11. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $5^{3x+4}=\frac{1}{25}$, b) $\frac{1}{2^{x^2}}\cdot 8^{x+2}>\frac{1}{16}$, c) $3\ln x-2=0$,

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\geq 2\log_{\frac{1}{2}}3$.

Rozwiązanie.

a) $5^{3x+4}=\frac{1}{25}$,

$5^{3x+4}=5^{-2}$,

$3x+4=-2$,

$3x=-6$

Odp.: $x=-2$.

b) $\frac{1}{2^{x^2}}\cdot 8^{x+2}>\frac{1}{16}$,

$2^{-x^2}\cdot 2^{3x+6}>2^{-4}$,

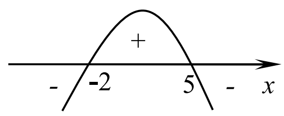
$2^{-x^2+3x+6}>2^{-4}$,

$-x^2+3x+6>-4$,

$-x^2+3x+10>0$

$\Delta=49,\ x_1=5,\ x_2=-2$,

Odp.: $x\in(-2,5)$



Rys. 14. Ilustracja do przykładu 11b

c) $3\ln x-2=0$

Dziedziną naszego równania jest $D=(0,+\infty)$ (wyrażenie logarytmowane musi być większe od 0). Wykonujemy kolejne przekształcenia:

$3\ln x=2$,

$\ln x=\frac{2}{3}$.

Prawą stronę zamieniamy teraz na logarytm naturalny korzystając z pierwszej z podanych wcześniej własności logarytmów:

$\ln x=\ln \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

Opuszczając logarytmy otrzymujemy ostatecznie:

$x=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

Ponieważ otrzymana wartość należy do wyznaczonej dziedziny, zatem rozwiązaniem naszego równania jest $x=\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 2\log_{\frac{1}{2}} 3$

Rozwiązując nierówność $x+1>0$ wyznaczamy najpierw dziedzinę naszej nierówności: $D=(-1,+\infty)$. Przekształcamy teraz prawą stronę nierówności stosując własność 7) logarytmów:

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 3^2$, stąd $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 9$.

Ponieważ podstawa logarytmów jest mniejsza niż 1, to opuszczamy logarytmy zmieniając znak nierówności na przeciwny:

$x+1 \leq 9$, to $x \leq 8$.

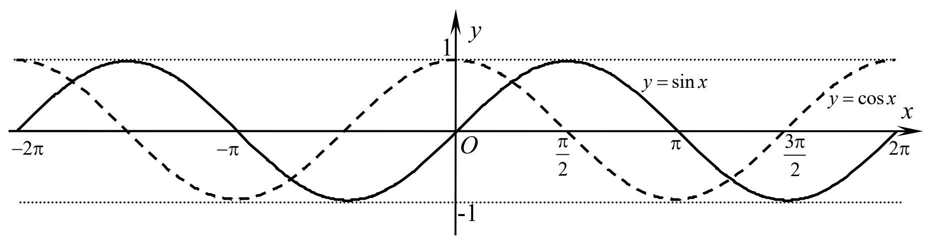
Uwzględniając dziedzinę nierówności otrzymujemy rozwiązanie: $x \in (-1,8\rangle$.

5° **Funkcje trygonometryczne**

Funkcją *sinus* nazywamy funkcję postaci

$$y=\sin x,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.



Rys. 15. Wykres funkcji sinus (linia ciągła) i cosinus (linia przerywana)

Funkcją *cosinus* nazywamy funkcję postaci

$$y=\cos x,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Na rysunku 15 przedstawiono wykresy obydwu funkcji (tzw. sinusoidę i cosinusoidę)

Funkcja sinus jest:
- przedziałami monotoniczna,
- ograniczona ($-1 \leq \sin x \leq 1$),
- okresowa (z okresem podstawowym $T_0 = 2\pi$),
- nieparzysta.

Funkcja cosinus jest:
- przedziałami monotoniczna,
- ograniczona ($-1 \leq \cos x \leq 1$),
- okresowa (z okresem podstawowym $T_0 = 2\pi$),
- parzysta.

Funkcją *tangens* nazywamy funkcję postaci

$$y = \operatorname{tg} x,$$

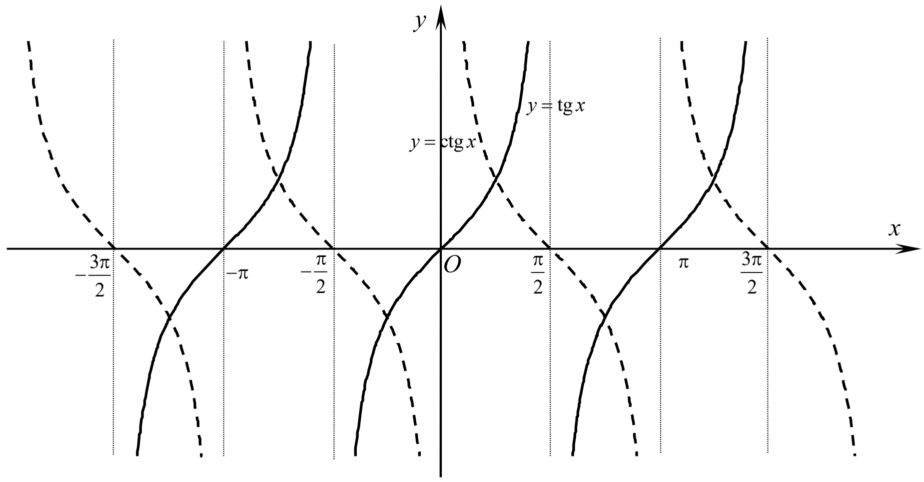
gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Funkcją *cotangens* nazywamy funkcję postaci

$$y = \operatorname{ctg} x,$$

gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Na rysunku 16 przedstawiono wykresy obydwu funkcji (tzw. tangensoidę i cotangensoidę)



Rys. 16. Wykres funkcji tangens (linia ciągła) i cotangens (linia przerywana)

Funkcja tangens jest:
- przedziałami rosnąca,
- nieograniczona,
- okresowa (z okresem podstawowym $T_0 = \pi$),
- nieparzysta.

Funkcja cotangens jest:
- przedziałami malejąca,
- nieograniczona,
- okresowa (z okresem podstawowym $T_0 = \pi$),
- nieparzysta.

Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych

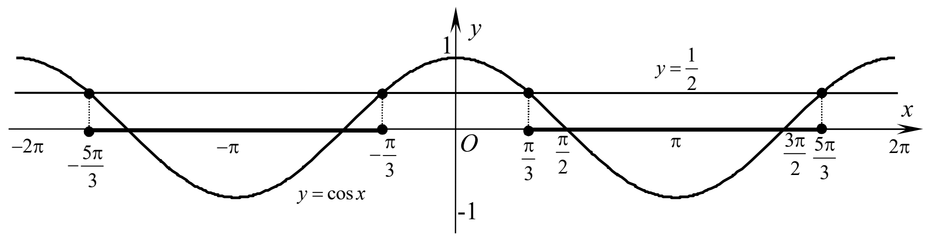
Pokażemy teraz, jak można rozwiązać proste równania i nierówności trygonometryczne. Przy ich rozwiązywaniu wygodnie jest posługiwać się wykresami odpowiednich funkcji, a dodatkowo należy uwzględnić fakt, że funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi.

Przykład 12. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos x \le \frac{1}{2}$; $\cos x > \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg} x = -1$; $\operatorname{tg} x \le -1$.

Rozwiązanie.

a) Szukamy najpierw rozwiązań danego równania w przedziale $\langle 0, 2\pi)$. Warto posłużyć się tutaj wykresami funkcji: $y = \cos x$ oraz $y = \frac{1}{2}$ (rysunek 17).



Rys. 17. Ilustracja do przykładu 12a

Widzimy, że w danym przedziale istnieją dwa rozwiązania (dwa punkty przecięcia narysowanych wykresów) naszego równania. Łatwo stwierdzić, że są to: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $\left(\text{bo } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$,

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} \quad \left(\text{bo } \cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right).$$

Z faktu, że funkcja cosinus jest funkcją okresową wynika, że wszystkich rozwiązań danego równania będzie nieskończenie wiele. Aby je otrzymać wystarczy do powyższych rozwiązań x_1 i x_2 dodać wielokrotności całkowite okresu podstawowego funkcji cosinus, czyli 2π. Zatem wszystkie rozwiązania równania $\cos x = \frac{1}{2}$ możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Patrząc na rysunek 4.17 oraz uwzględniając powyższe rozważania, łatwo stwierdzić, że rozwiązaniem nierówności $\cos x \le \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi)$

będzie przedział $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$. Biorąc pod uwagę okresowość funkcji cosinus, daną nierówność spełniają zatem:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

W przypadku nierówności $\cos x > \frac{1}{2}$ wygodniej jest wyznaczyć najpierw rozwiązania równania $\cos x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -\pi, \pi)$ (można wziąć dowolny przedział o długości równej okresowi podstawowemu danej funkcji). Łatwo stwierdzić, że będą to: $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Rozwiązaniami danej nierówności będą te wszystkie x, dla których wartości funkcji cosinus są większe od $\frac{1}{2}$ (w interpretacji graficznej – te punkty wykresu funkcji $y = \cos x$, które leżą nad prostą $y = \frac{1}{2}$), czyli:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

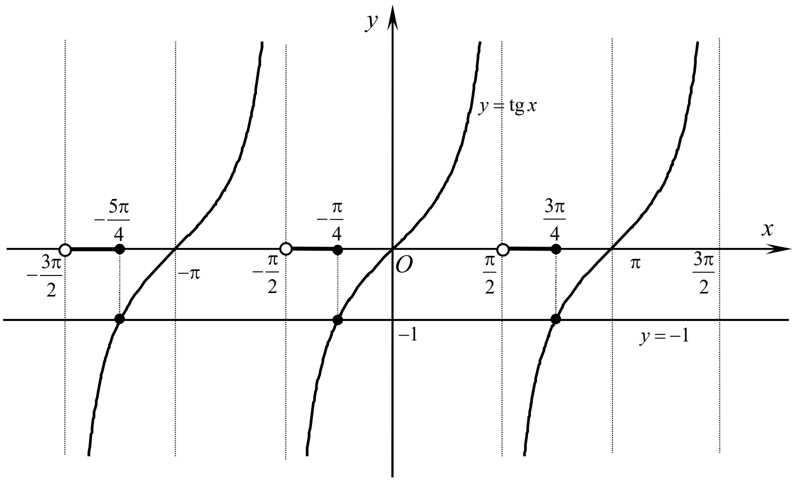
b) Dziedziną danego równania (i jednocześnie nierówności) jest:

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wyznaczamy najpierw rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = -1$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. Jako ilustracja posłużmy się wykresami odpowiednich funkcji: $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = -1$ (rysunek 18).

Łatwo stwierdzić, że w założonym przedziale istnieje jedno rozwiązanie danego równania: $x = -\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{bo } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1 \right)$. Uwzględniając fakt, że funkcja tangens jest funkcją okresową z okresem podstawowym $T_0 = \pi$, wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -1$ można zatem zapisać w postaci:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



Rys. 18. Ilustracja do przykładu 12b

Rozwiązując nierówność $\operatorname{tg} x \le -1$ również wygodnie posłużyć się wykresami odpowiednich funkcji. Z rysunku 18 można łatwo odczytać, które punkty wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ leżą poniżej lub na prostej $y = -1$. Uwzględniając dziedzinę nierówności oraz okresowość funkcji tangens, nierówność $\operatorname{tg} x \le -1$ spełniają:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\, -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}\,.$$

6° Funkcje cyklometryczne

Funkcje trygonometryczne nie są funkcjami różnowartościowymi w swoich dziedzinach. Można jednak podać przedziały (dokonać obcięcia tych funkcji do przedziałów), w których są one różnowartościowe. Wówczas będzie można określić funkcję odwrotną do każdej funkcji trygonometrycznej. Takie funkcje nazywamy *funkcjami cyklometrycznymi* (lub inaczej – *kołowymi*).

Funkcją *arcus sinus* (arcsin) nazywamy funkcję określoną w następujący sposób:

$$(y = \arcsin x) \Leftrightarrow \left[x = \sin y \wedge y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right],$$

gdzie $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Funkcją *arcus cosinus* (arccos) nazywamy funkcję określoną w następujący sposób:

$$(y = \arccos x) \Leftrightarrow \left[x = \cos y \wedge y \in \langle 0, \pi\rangle\right],$$

gdzie $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Przykład 13. Obliczyć:

a) $\arccos\frac{1}{2}$, b) $\arcsin(-1)$.

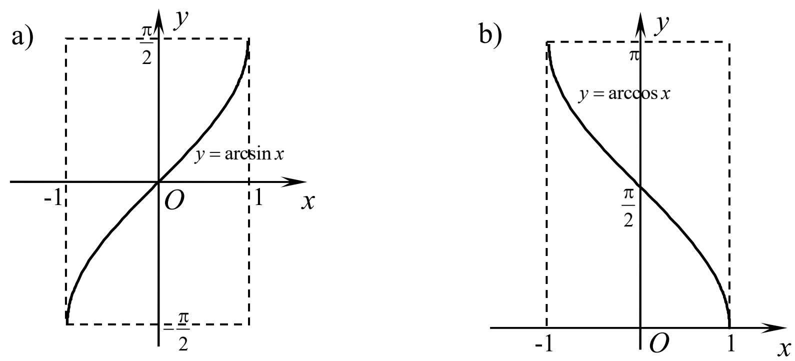
Rozwiązanie.

a) Z powyższych definicji widać, że aby wyznaczyć wartość funkcji arccos dla argumentu $\frac{1}{2}$, należy znaleźć taką liczbę (taki kąt) należącą do przedziału $\langle 0, \pi\rangle$, dla której cosinus przyjmuje wartość równą $\frac{1}{2}$ – tym szukanym kątem jest $\frac{\pi}{3}$. Możemy zatem zapisać:

$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, ponieważ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{3} \in \langle 0, \pi\rangle$.

b) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, ponieważ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ i $-\frac{\pi}{2} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Na rysunku 19 przedstawiono wykresy funkcji arcus sinus i arcus cosinus.



Rys. 19. Wykresy funkcji: a) $y = \arcsin x$, b) $y = \arccos x$

Funkcją *arcus tangens* (arctg) nazywamy funkcję określoną w następujący sposób:

$$(y = \operatorname{arc\,tg} x) \Leftrightarrow \left[x = \operatorname{tg} y \wedge y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Funkcją *arcus cotangens* (arcctg) nazywamy funkcję określoną w następujący sposób:

$$(y = \operatorname{arc\,ctg} x) \Leftrightarrow \left[x = \operatorname{ctg} y \wedge y \in (0, \pi) \right],$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 14. Obliczyć:

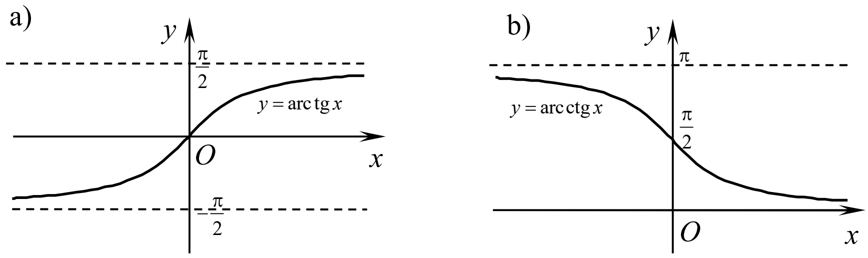
a) $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\operatorname{arc\,ctg}(-1)$.

Rozwiązanie.

a) $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, ponieważ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$,

b) $\operatorname{arc\,ctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, ponieważ $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1$ i $\frac{3\pi}{4} \in (0, \pi)$.

Na rysunku 20 przedstawiono wykresy funkcji arcus tangens i arcus cotangens.



Rys. 20. Wykresy funkcji: a) $y = \operatorname{arctg} x$, b) $y = \operatorname{arcctg} x$

Wyznaczanie dziedziny funkcji złożonej

Bardzo ważną umiejętnością z zakresu analizy matematycznej jest, umiejętność wyznaczania dziedziny (naturalnej) funkcji. Wyznaczenie dziedziny jest na ogół pierwszym krokiem, od którego rozpoczynamy badanie funkcji ze względu na interesujące nas własności. Musimy stwierdzić, dla jakich wartości wzór określający funkcję ma sens liczbowy. W tym celu dokonujemy analizy funkcji ze względu na występowanie w jej wzorze pewnego typu wyrażeń, przy których należy poczynić określone założenia. Wyrażeniami tymi (oraz odpowiadającymi im wymaganymi warunkami) są:

1° $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, warunek: $v(x) \neq 0$,

2° $\sqrt[n]{v(x)}$, (n – liczba parzysta), warunek: $v(x) \geq 0$,

3° $\log_a v(x)$, warunek: $v(x) > 0$,

4° $\operatorname{tg} v(x)$, warunek: $v(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

5° $\operatorname{ctg} v(x)$, warunek: $v(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

6° $\arcsin v(x)$ lub $\arccos v(x)$, warunek: $-1 \leq v(x) \leq 1$.

Widać zatem, że w przypadku funkcji złożonych oraz bardziej skomplikowanych funkcji elementarnych, znalezienie dziedziny sprowadza się do zapisania oraz rozwiązania pewnej liczby nierówności.

Przykład 15. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $y = \sqrt{\dfrac{4}{x-3} - 2} - 5\log(4-x)$, b) $y = \dfrac{\ln(x^2 - x)}{2^x - 4\sqrt{2}} + \arccos\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$.

Rozwiązanie.

a) Patrząc na wzór funkcji łatwo stwierdzić, że aby miał on sens liczbowy spełniony musi być układ następujących warunków:

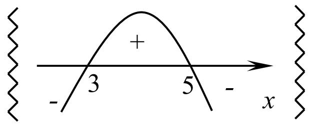
$$\begin{cases} x-3 \neq 0 & (1) \\ \dfrac{4}{x-3} - 2 \geq 0 & (2) \\ 4 - x > 0 & (3) \end{cases}.$$

Rozwiązujemy poszczególne nierówności:

(1) $x - 3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

(2) $\dfrac{4}{x-3}-2\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4-2(x-3)}{x-3}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{10-2x}{x-3}\geq 0 \quad \Leftrightarrow$

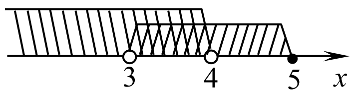
$\Leftrightarrow \quad (10-2x)(x-3)\geq 0$ (warunek (1) uwzględnimy na końcu) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 

$\Leftrightarrow \quad x\in\langle 3,5\rangle$,

(3) $4-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad -x>-4 \quad \Leftrightarrow \quad x<4 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,4)$.

Wyznaczając część wspólną otrzymanych zbiorów (rysunek obok) zapisujemy dziedzinę: $D_f=(3,4)$.



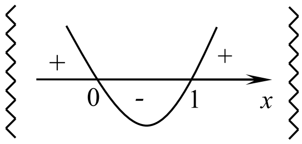
b) Zapisujemy odpowiednie warunki:

$$\begin{cases} 2^x-4\sqrt{2}\neq 0 & (1) \\ x^2-x>0 & (2) \\ -1\leq 1-\dfrac{1}{2}x\leq 1 & (3) \end{cases}.$$

Rozwiązujemy:

(1) $2^x-4\sqrt{2}\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x\neq 2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x\neq 2^{\frac{5}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x\neq\dfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$,

(2) $x^2-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)>0 \quad \Leftrightarrow$ 

$\Leftrightarrow$

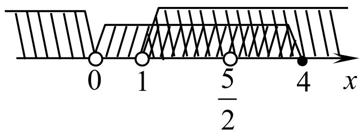
$\Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,

(3) $-1\leq 1-\dfrac{1}{2}x\leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1\leq 1-\dfrac{1}{2}x \\ 1-\dfrac{1}{2}x\leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}x\leq 2 \\ -\dfrac{1}{2}x\leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\leq 4 \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x\in\langle 0,4\rangle$.

Dziedziną jest część wspólna poszczególnych zbiorów:

$D_f = \langle 1,4 \rangle \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$.



Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć:

28. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\mathrm{arctg}(-1)$,

29. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\arccos\frac{1}{2} + \mathrm{arcctg}\sqrt{3}$,

30. $\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) + \arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

31. $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

32. $y = \frac{\sqrt{4x + x^2}}{x}$,

33. $y = \log\frac{2+x}{2-x}$,

34. $y = \log(x^2 - 4) + \sqrt{6 - 2x}$,

35. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \ln(9 - x^2)$,

36. $y = \log\frac{1-x}{x+2} + \sqrt{x+1}$,

37. $y = \frac{\sqrt{\log(9 - x^2)}}{2^x - 1}$,

38. $y = \sqrt[6]{\frac{1}{x^2} - x^2} + \log(2 + x - 6x^2)$,

39. $y = \sqrt{\log_{0,1}\frac{3x-1}{2x+1}}$,

40. $y = \frac{\log(1 - \log_5(9 - x^2))}{3^x - 9\sqrt{3}}$,

41. $y = \arcsin(2x - 6)$,

42. $y = \arccos\dfrac{x}{2-x}$,

43. $y = \arcsin\dfrac{1}{x-2} + \sqrt[4]{\dfrac{8}{1-x} - 2}$.

44. $y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch